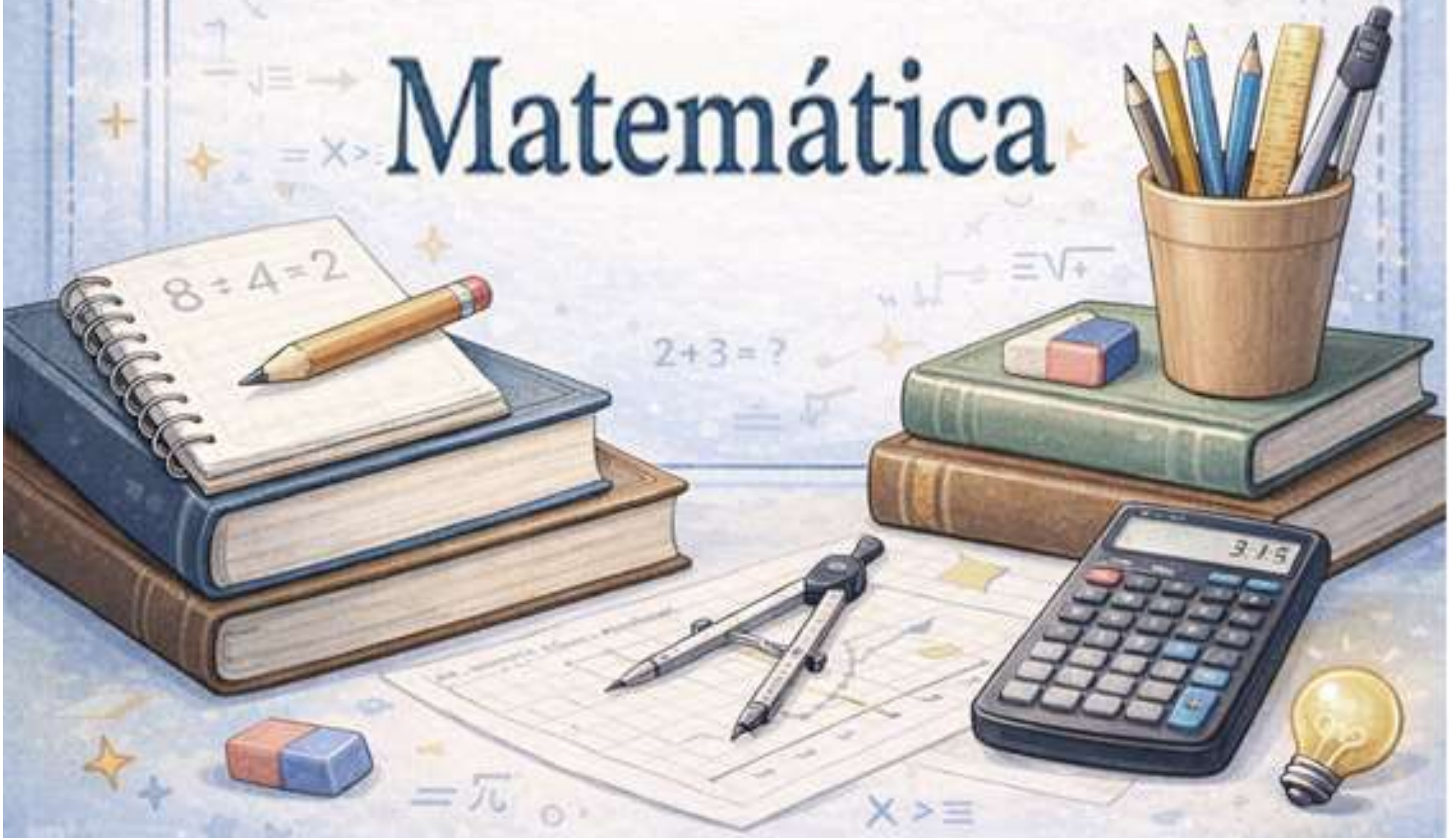
COLEGIO TECNOLÓGICO UTN
FACULTAD REGIONAL DEL NEUQUÉN
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Cuadernillo TEÓRICO

Colegio Tecnológico UTN

Matemática



Año 2026

índice

1. El Conjunto de los Números Naturales 6
   1.2. Características principales 6
   1.3. Orden y Representación. Operaciones. Propiedades 6
   1.4. Lenguaje Coloquial y Simbólico 7
   1.5. Operaciones en ℕ: 7
   1.6. Descomponer los números 10
   1.7. División entera: 11
   1.8. Potencia y Raíces de números naturales: 11
   1.9. Múltiplos y Divisores 12
   1.10. Números Primos, Compuestos y Coprimos: 13
   1.11. Reglas De Divisibilidad 13
   1.12. Descomposición en Factores Primos. 14
   1.13. Mínimo Común Múltiplo (MCM) y Máximo Común Divisor (MCD): 14
2. Los Números Racionales 15
   2.2. Fracciones Equivalentes 15
   2.3. Expresiones Decimales 15
   2.4. Fracciones Decimales 16
   2.5. Comparación de numerosa racionales 16
   2.6. Representación en la recta numérica 17
   2.7. Operaciones con números racionales y decimales. 17
   2.8. Multiplicación de Fracciones 18
   2.9. Multiplicación de un número Natural por un Decimal 18
   2.10. Multiplicación de dos números Decimales 18
   2.11. Inverso multiplicativo. 18
   2.12. División de fracciones 19
   2.13. División de números naturales con resultado decimal 19

2.14. Multiplicación y división por potencias de 10 19
2.15. Truncamiento y Redondeo: 20
2.16. Porcentaje como número racional: 20
3. Los Números Enteros 22
3.1. Numero enteros: 22
3.3. Valor Absoluto y Números Opuestos: 22
3.4. Suma y resta de números Enteros: 22
3.5. Multiplicación y División de números Enteros 23
3.6. Propiedad distributiva: 23
3.7. Supresión de Paréntesis: 24
3.8. Operaciones combinadas 24
3.9. Expresiones Algebraicas 24
3.10. Propiedad distributiva y Factor Común 25
4. Función de Proporcionalidad Directa y inverda 27
4.1. Función de Proporcionalidad Directa 27
4.2. Función de Proporcionalidad Inversa 28
5. GEOMETRÍA 30
5.1. Coordenadas cartesianas. 31
6. Teorema de Pitágoras 32
7. Triángulo Rectángulo 33
8. Ángulos 34
9. Figuras Planas 36
10. Los Ángulos de un Polígono 38
11. Perímetro y Área de Figuras Planas 39
12. Cuerpos 40
12.1. Cuerpos redondos: 42
13. Simela 45

1. El Conjunto de los Números Naturales

Los Números Naturales son los primeros que utilizó el ser humano. Surgen de la necesidad de contar objetos y de ordenar elementos.

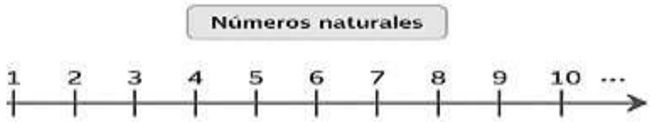
1.1. Números Naturales:

1.1. <u>Números Naturales:</u> El conjunto de los números naturales está formado por los números que usamos para contar y ordenar cantidades "exactas".

Se representa con la letra $\mathbb{N}$ y se escribe:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$$

Los puntos suspensivos indican que los números naturales continúan infinitamente.



En matemática, a veces necesitamos representar la ausencia de elementos. Por eso, usamos una distinción importante:

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$$

(Se lee "Naturales incluido el cero").

<u>Video Sugerido:</u> https://www.youtube.com/watch?v=Q2zan_9zzg8

1.2. Características Principales:

- ***Es un conjunto infinito***: No existe un ***"último"*** número natural. Si pensamos en uno muy grande, siempre podemos sumarle 1 y obtener el siguiente (sucesor).
- ***Es un conjunto ordenado:*** Siempre podemos decir si un número natural es:

  $$\boldsymbol{mayor\ que}\ (>) \quad ; \quad \boldsymbol{menor\ que}\ (<) \quad ; \quad \boldsymbol{igual}\ (=)$$

  A otro número natural
- ***Son números discretos:*** Entre el 4 y el 5, por ejemplo, no existe ningún otro número natural.

1.3. Orden y Representación. Operaciones. Propiedades.

1.3.1. Orden:

1.3.1. Orden: En el conjunto de los números naturales se puede establecer un orden creciente:

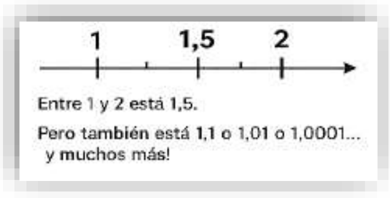
$$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \cdots < n < \cdots$$

Esto nos permite afirmar, por ejemplo, que:

- Los números 1, 2 y 3 son consecutivos.
- El número 2 es anterior a 3.
- El siguiente de 15 es   .

¡IMPORTANTE!

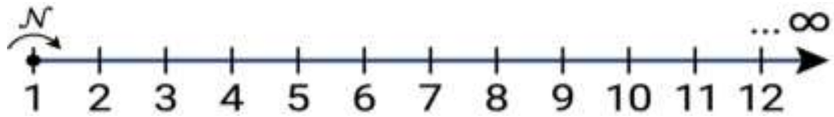
Este tipo de orden consecutivo **no se aplica a fracciones ni a números decimales**, ya que **entre dos números siempre hay otro**.



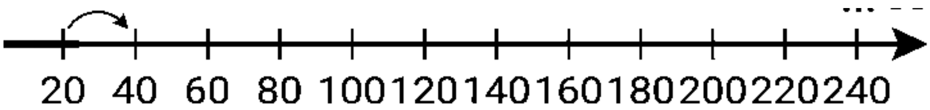
1.3.2. Representación en la Recta Numérica:

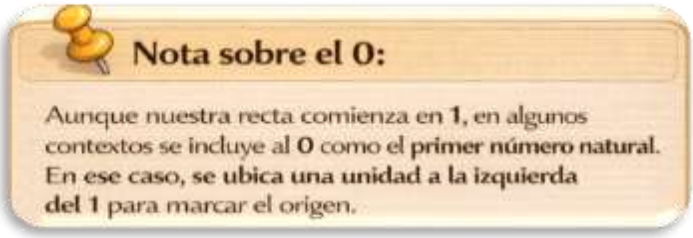
1.3.2. <u>Representación en la Recta Numérica:</u> Cada número natural puede representarse gráficamente como un punto sobre una recta. Para construirla, seguimos estos criterios:

- **Punto de partida:** Iniciamos la secuencia en el 1.
- **Unidad de medida:** Elegimos una distancia fija para marcar la separación entre dos números consecutivos. Esta medida debe ser siempre la misma en toda la recta.



- **Escala:** La escala elegida nos permite ubicar números de cualquier tamaño (de uno en uno, de diez en diez, etc.), siempre que mantengamos el mismo criterio de separación.





Nota sobre el 0:

Aunque nuestra recta comienza en **1**, en algunos contextos se incluye al **0** como el **primer número natural. En ese caso, se ubica una unidad a la izquierda del 1** para marcar el origen.

1.4. Lenguaje Coloquial y Simbólico

La matemática utiliza el lenguaje coloquial, que es el que utilizamos habitualmente para expresarnos con palabras y el lenguaje simbólico, formado por números, símbolos y letras. Las letras representan números desconocidos o variables, permitiendo expresar reglas y fórmulas de manera general.

Lenguaje coloquial	Lenguaje Simbólico
El triple de siete	$7 \,.\, 3$
La mitad de la suma entre doce y ocho.	$(12 + 8) : 2$
Un número	n
El doble de un número	$2.n$
La mitad de un número	$n : 2$ o $\frac{n}{2}$
El siguiente de un número	$n + 1$
El anterior de un número	$n - 1$

¡IMPORTANTE!

Se puede usar cualquier letra (a, n, y), pero la x es la más frecuente en álgebra.

1.5. Operaciones en $\mathbb{N}$:

Consideramos tres números naturales a ; b y c. Luego:

1.5.1. La Suma (Adición) en N: Es una operación que nos permite agrupar, reunir o juntar dos o más cantidades en una sola.

1.5.2. Propiedades de la Suma de $\mathbb{N}$

Propiedad	¿Qué significa?	Ejemplo
Ley interna: $a + b \in \mathbb{N}$	Si sumamos dos números naturales, el resultado también es un número natural.	$3 + 4 =$
Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$	La forma de agrupar los sumandos no cambia el resultado.	$(2 + 9) + 5 = 2 + (9 + 5)$ $=$ $=$
Conmutativa: $a + b = b + a$	El orden de los sumandos no modifica la suma.	$7 + 8 = 8 + 7$ $=$
Elemento neutro: $a + 0 = a$	Al sumar **0** a cualquier número, el resultado no cambia.	$3 + 0 =$

1.5.3. Propiedades De La Resta: La resta no cumple las mismas propiedades que la suma.

Propiedad	¿Qué significa?	Ejemplo
No es interna en $\mathbb{N}$	A veces, al restar, el resultado no pertenece a $\mathbb{N}$.	$3 - 5 =$
No es conmutativa	Cambiar el orden modifica el resultado.	$4 - 7$ no es igual a $7 - 4$ $4 - 7 \neq 7 - 4$ $\neq$

1.5.4. **La Multiplicación en ℕ:** Multiplicar es una forma abreviada de resolver una suma de sumandos iguales.

1.5.5. Propiedades De La Multiplicación: Son propiedades muy útiles para resolver cálculos.

Propiedad	¿Qué significa?	Ejemplo
Ley interna: $a.b \in \mathbb{N}$	El producto de dos números naturales también es un número natural.	$7\,.\,3 =$
Asociativa: $(a.b).c = a.(b.c)$	La forma de **agrupar** los factores no cambia el producto.	$(4\,.\,3).5 \;=\; 4\,.(3\,.\,5)$ $=$ $=$
Conmutativa: $a.b = b.a$	El orden de los factores no altera el producto.	$7\,.\,9 \;=\; 9\,.\,7$ $=$
Elemento neutro: $a.1 = a$	Al multiplicar cualquier número por **1**, el resultado no cambia.	$13\,.\,1 =$
Distributiva: $a.(b+c) = a.b + a.c$	Multiplicar una suma es lo mismo que multiplicar cada sumando y luego sumar.	$3\,.(7+5) = 3.7 + 3\,.\,5$ $=$ $=$

1.5.6. **Propiedades De La División:** No cumple todas las propiedades de la multiplicación.

Propiedad	¿Qué significa?	Ejemplo
No es interna en ℕ	A veces el cociente no es natural.	$5 : 2 =$
No es conmutativa	Cambiar el orden produce otro resultado.	6 : 2 no es igual a 2 : 6 $6 : 2 \neq 2 : 6$ $\neq$
$0 : a = 0 \quad (a \neq 0)$	*0 dividido por cualquier número distinto de* 0 *es* 0.	$0 : 23 =$

No se puede dividir entre 0.	La división por 0 **no está definida.**	

1.5.7. Repasemos Las Propiedades De Las Operaciones Con Números Naturales.

- **Suma:** Como vimos, al sumar, se pueden asociar los términos y cambiar el orden de manera conveniente, gracias a las propiedades asociativa y conmutativa.
  Por ejemplo, si debemos resolver:

$$(38 + 15) + 22 =$$
$$(15 + 38) + 22 =$$
$$15 + (38 + 22) =$$
$$15 + 60 =$$

¡IMPORTANTE!

Al restar, no da lo mismo asociar de cualquier forma ni cambiar el orden de los números, ya que esto modifica el resultado.

Ejemplo: $15 - 8 - 3 = (15 - 8) - 3 = 7 - 3 =$

Pero, si realizamos: $15 - (8 - 3) = 15 - 5 =$

Conclusión

Como los resultados son distintos, **la resta no es asociativa.**

- **Multiplicación:** Como vimos, al multiplicar, se pueden *"asociar"* los términos y *"cambiar"* el orden de los **factores** de manera conveniente, gracias a las propiedades asociativa y conmutativa para facilitar los cálculos:
  Ejemplo: si debemos resolver:

$$(5 \,.\, 37) \,.\, 2 =$$
$$(37 \,.\, 5) \,.\, 2 =$$
$$37 \,.\, (5 \,.\, 2) =$$
$$37 \,.\, 10 =$$

- **Propiedad distributiva:** ***La multiplicación es distributiva respecto de la suma y de la resta***. Esto significa que, si tenemos una suma o una resta dentro de un paréntesis multiplicada por un número, podemos *"distribuir"* ese número multiplicando a cada término por separado
  Ejemplo: $7.(3 + 4). = 7 \,.\, 3 + 7 \,.\, 4 =$

$$(9 - 5).\, 8 = 9 \,.\, 8 - 5 \,.\, 8 =$$

1.6. Descomponer Los Números

Conocer y aplicar estas propiedades nos permite **"Descomponer los números"** para resolver cálculos de una manera más sencilla y rápida, incluso sin usar la calculadora.

- **Sumar y Multiplicar "por partes":** Descomponer un número significa desarmarlo en partes más simples (como unos, dieces, cienes, etc.) para que operar con ellos sea más fácil y rápido, incluso mentalmente.

Descomponer para Sumar: Puedes desarmar los sumandos según su valor posicional y luego agruparlos.

Ejemplo: $125 + 243 =$

Los *"desarmamos"*: $(100 + 20 + 5) + (200 + 40 + 3) =$

Agrupamos de manera conveniente: $(100 + 200) + (20 + 40) + (5 + 3) =$

Sumamos las partes: $300 + 60 + 8 =$

Descomponer para Multiplicar: (Propiedad Distributiva): Para multiplicar números grandes, podemos desarmar uno de los factores y multiplicar cada parte por separado.

Por ejemplo: $7 \,.\, 17 =$

"Desarmamos" uno de los factores*:* $7 \,.\, (10 + 7) =$

Aplicamos la Propiedad Distributiva: $7 \,.\, 10 + 7.7 =$

Sumamos las partes: $\quad + \quad =$

1.7. <u>División Entera:</u>

La división entera es una operación en la que se reparte un número (dividendo) en partes iguales según otro número (divisor), obteniendo un cociente y un resto.

Es importante reconocer los **cuatro elementos** que intervienen en una división entera y cómo se relacionan entre sí.

$$17 : 5 = 3 \;\; (con\, resto\; 2)$$

Además, en toda división entera se cumple la relación:

Dividendo = Divisor × Cociente + Resto

Es decir que: $17 = 5 \,.\, 3 + 2$

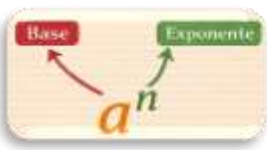
¡IMPORTANTE!

- Una división entera es ***<u>exacta</u>*** si su resto es $\mathbf{0}$; si el resto es distinto de 0, **no** es exacta.
- **<u>El resto siempre es menor que el divisor</u>**, porque si fuera mayor o igual, la división aún no estaría terminada.
- No se puede dividir por cero, porque no existe ningún número que multiplicado por 0 dé un número distinto de 0.

  Por ejemplo: $18 : 3 = 6 \quad porque \quad 3 \,.\, 6 = 18\,;$ pero con 0 esto no es posible.

1.8. <u>Potencia y Raíces de números naturales:</u>

1.8.1. <u>Potencia:</u> Es una forma abreviada de escribir una multiplicación de factores iguales. Consiste en multiplicar un número por sí mismo varias veces. Se indica:



$$a^n = \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, \cdots}_{n-veces}$$

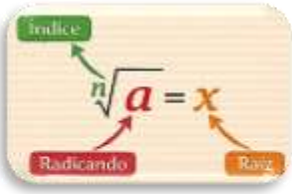
Base $(\boldsymbol{a})$: Es el número que se multiplica.

Exponente $(\boldsymbol{n})$: Es el número pequeño que indica cuántas veces se debe multiplicar la base.

Ejemplo:

- 3^2 “se lee 3 al cuadrado”.
  Se tiene multiplicar al 3 por si mismo 2 veces, es decir que: $3^2 = 3.3 = 9$
- 3^3 “se lee 3 al cubo”.
  Se debe multiplicar al 3 por si mismo, 3 veces, es decir que: $3^3 = 3.3.3 = 27$

1.8.2. **<u>Raíz:</u>** es la operación inversa a la potenciación. Si en la potencia buscamos el resultado de multiplicar, en la raíz buscamos qué número se multiplicó. Una raíz es una expresión de la forma:



- $\boldsymbol{n}$ es el **Índice.** $\boldsymbol{a}$ es el **Radicando.** $\boldsymbol{x}$ es la **Raíz.**
- La raíz busca un número que, elevado a n, dé como resultado a.

1.8.3. ¿Cómo se relacionan? La radicación, es una de las operaciones inversa de la potenciación. En consecuencia, podemos establecer la siguiente relación:

$$x^n = a \ \underset{\longleftrightarrow}{\text{si y solo si}} \ \sqrt[n]{a} = x$$

Videos sugeridos:

- https://www.youtube.com/watch?v=aXXuoWJ5dC4
- https://www.youtube.com/watch?v=wxFti9sB0zM

1.9. <u>Múltiplos y Divisores.</u>

1.9.1. ¿Qué es un múltiplo? Un número natural es múltiplo de otro cuando es el resultado de multiplicar este último número por otro número natural.

Cómo encontrarlos: Se multiplica el número dado por 1, por 2, por 3, etc.

Ejemplo: 24 es múltiplo de 12 porque $12 .2 = 24$.

A su vez 24 también es último de 6, porque $6 .4 = 24$

1.9.2. ¿Qué es un divisor (o factor)? Un número es divisor de otro cuando lo divide en partes iguales, sin que sobre nada. En matemáticas, esto significa que la división entera debe tener resto 0.

Cómo encontrarlos: Realizamos la división y verificamos que sea exacta.

- **Ejemplo:** ¿7 es divisor de 133?
  Al hacer la división $133 : 7 =$ vemos que el cociente es **19** y el **resto es 0**.
  Por lo tanto, 7 y 19 son divisores de 133 y 133 es múltiplo de 7 y de 19.

1.9.3. **La Relación Múltiplo-Divisor:** Estos conceptos son como las dos caras de una misma moneda. Si realizamos una división exacta, podemos afirmar varias cosas a la vez: Si $\mathbf{133 : 7 = 19}$ (con resto $\mathbf{0}$), entonces:

- 133 es múltiplo de 7 y de 19.
- 7 y 19 son divisores de 133.

Video sugerido: https://youtu.be/kJE2X0gMWfY?si=ZsqsqxGtpqr2o_dp

1.10. Números: Primos, Compuestos y Coprimos:

En el conjunto de los números naturales, podemos clasificar a los números según la cantidad de divisores que poseen.

1.10.1. Números Primos:
Números Primos: Un número natural es primo si tiene exactamente dos divisores distintos: el mismo número y la unidad ($\mathbf{1}$).

Ejemplo: El número 11 es primo porque sus únicos divisores son 1 y 11.

Nota: El número 1 no es primo ni compuesto, ya que solo tiene un divisor.

1.10.2. Números Compuestos:
Números Compuestos: Un número natural es compuesto cuando tiene más de dos divisores naturales. Esto significa que, además de ser divisible por 1 y por sí mismo, tiene al menos un divisor más.

Ejemplo: El número $\mathbf{33}$ es compuesto porque sus divisores son 1 ; 3 ; 11 y 33.

1.10.3. Números Coprimos (Primos entre sí):
Números Coprimos (Primos entre sí): Dos o más números son coprimos cuando su único divisor común es el $\mathbf{1}$.

Ejemplo: 8 y **21** son coprimos.

Divisores de 8: $\{1\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 8\}$.

Divisores de 21: $\{1\ ;\ 3\ ;\ 7\ ;\ 21\}$.

<u>Único divisor en común</u>: 1.

Por otro lado, $\mathbf{14}$ y $\mathbf{21}$ no son coprimos, porque comparten al **7** como divisor además del 1.

1.11. Reglas De Divisibilidad:

Las reglas de divisibilidad permiten saber si un número es divisible por otro **sin hacer la cuenta**.

Un número es divisible por:	Criterio de divisibilidad	Ejemplo
2	Si termina en $0, 2, 4, 6, 8$.	$15\mathbf{8}$ es divisible por 2.
3	Si la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.	$459 \to 4 + 5 + 9 = 18$ (múltiplo de 3).
4	Si sus dos últimas cifras son 00 o un múltiplo de 4.	512 es divisible por 4.
5	Si termina en 0 o en 5.	1.225 es divisible por 5.
6	Si es divisible por 2 y por 3 al mismo tiempo.	132 (es par y $1 + 3 + 2 = 6$).
9	Si la suma de sus cifras es un múltiplo de 9.	$819 \to 8 + 1 + 9 = 18$ (múltiplo de 9).
$10, 100, \ldots$	Si termina en $0, 00, \ldots$ respectivamente.	1.500 es divisible por 10 y 100.

¿Para qué sirve esto? Estos criterios te ahorrarán mucho tiempo cuando tengas que hacer la **descomposición en factores primos** para calcular el MCM y el MCD.

1.12. Descomposición en Factores Primos.

¿Qué es? Es *"desarmar"* un número compuesto hasta que solo queden **números primos** multiplicándose entre sí. Es como encontrar el ADN del número.

¿Cómo se hace?

- **i.** Escribe el número y traza una línea vertical a su derecha.
- **ii.** Divide el número por el numero primo más chico que puedas $(2\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ \ldots)$.
- **iii.** Escribe el resultado debajo y repite hasta llegar al **1**.

Descomponemos el 24:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 24 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3 = 2^3\cdot 3$$

1.13. Mínimo Común Múltiplo (MCM) y Máximo Común Divisor (MCD):

1.13.1. El Mínimo Común Múltiplo (M.C.M.): de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes, mayores que 0.

Una forma práctica de calcularlo es mediante la descomposición en factores primos:

- **i.** Descomponer los números en factores primos.
- **ii.** Tomar los factores **comunes y no comunes** con su **mayor exponente**.
- **iii.** Se multiplican entre sí esos factores.

Ejemplo: *Calcular el $M.C.M$ de 12 y 18:*

$$\begin{array}{l} 12 = 2\,.\,2\,.\,3 = 2^2\,.\,3 \\ 18 = 2\,.\,3\,.\,3 = 2\,.\,3^2 \end{array} \qquad \text{Tomamos} \quad \begin{array}{c} 2^2 \\ 3^2 \end{array}$$

Entonces: $M.C.M(12\,;18) = 2^2\,.\,3^2 = 4\,.\,9 = 36$

1.13.2. **El Máximo Común Divisor (M.C.D.):** de dos o más números es el mayor de los divisores comunes de esos números.

Una forma práctica de calcularlo es mediante la descomposición en factores primos:

- **i.** Descomponer los números en factores primos.
- **ii.** Tomar solo los factores **comunes** con su **menor exponente**.
- **iii.** Se multiplican entre sí esos factores.

Ejemplo: *Calcular el $M.C.D$ de 12 y 18:*

$$\begin{array}{l} 12 = 2\,.\,2\,.\,3 = 2^2\,.\,3 \\ 18 = 2\,.\,3\,.\,3 = 2\,.\,3^2 \end{array} \qquad \text{Tomamos} \quad \begin{array}{c} 2^1 \\ 3^1 \end{array}$$

Entonces: $M.C.D(12\,;18) = 2^1\,.\,3^1 = 2\,.\,3 = 6$

2. Los Números Racionales

2.1. Los números racionales positivos

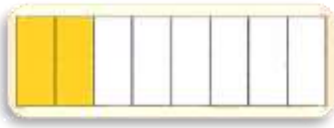
Un número racional es una expresión de la forma $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$*, donde* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$ *son números naturales con* $\boldsymbol{b} \neq 0$

- El número a es llamado $\boldsymbol{numerador}$ de la fracción y $\boldsymbol{b}$ *se llama* $\boldsymbol{denominador}$ de la fracción.
  Ejemplo:

$$\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{7}$$

2.2. Fracciones Equivalentes

Dos fracciones son $\boldsymbol{equivalentes}$ cuando representan el mismo número racional.

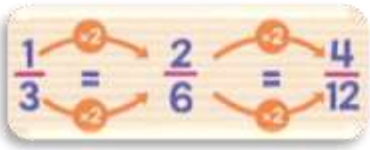
$\frac{1}{4}$			$\frac{2}{8}$	

Para graficar fracciones, visite: https://www.geogebra.org/m/HWEGBuXF

Para determinar fracciones equivalentes se pueden usar los siguientes procedimientos:

Amplificación

Se multiplica el numerador y denominador por un mismo número natural distinto de 0.

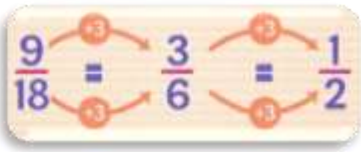


Entonces, decimos que:

$\frac{1}{3}$ es equivalente a $\frac{2}{6}$ y a $\frac{4}{12}$

Simplificación

Se divide el numerador y denominador por un mismo número natural que sea divisor de los dos.



Entonces, decimos que

$\frac{9}{18}$ es equivalente a $\frac{3}{6}$ y a $\frac{1}{2}$

¡IMPORTANTE!

Una **fracción es irreducible cuando no se puede simplificar**.
En este caso, el numerador y el denominador son coprimos.

2.3. Expresiones Decimales

Todo número racional se puede escribir como una **expresión decimal**. Para encontrar esta expresión, simplemente debemos dividir el numerador por el denominador.

- **Tipos de expresiones decimales:**
  i. **Exactas:** Tienen una cantidad finita (que se termina) de cifras decimales.

Ejemplo:

$$\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75 \qquad \frac{8}{10} = 8 : 10 = 0{,}8$$

ii. **Periódicas:** Tienen una o más cifras que se repiten infinitamente. Ese grupo que se repite se llama **período** y se marca con un "arquito" (⌒).

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} = 2 : 3 = 0{,}666 \ldots \quad \text{se escribe} \quad 0,\hat{6}$$

$$\frac{4}{99} = 4 : 99 = 0{,}04040 \ldots \quad \text{se escribe} \quad 0,\widehat{04}$$

$$\frac{7}{30} = 0{,}233333 \ldots \qquad \text{entonces} \qquad \frac{7}{30} = 0{,}2\hat{3}$$

Video sugerido:

https://www.youtube.com/watch?v=3iMLCMXFrSs

2.4. Fracciones Decimales

Una **fracción decimal** es aquella cuyo denominador es una **potencia de 10** (como $10, 100, 1.000, \ldots$). Estas fracciones siempre se pueden representar como una **expresión decimal exacta** (un número con una cantidad finita de cifras después de la coma).

Ejemplos:

$$\frac{7}{10}\ (siete\ décimos)$$

$$\frac{14}{100} = 0{,}14\ (catorce\ centésimos)$$

$$\frac{555}{1000} = 0{,}555\ (quinientos\ cincuenta\ y\ cinco\ milésimos).$$

¿Cómo identificarlas si el denominador no es 10? Si al simplificar una fracción, su denominador solo tiene como factores primos al 2, al 5 (o a ambos), es una fracción decimal.

2.5. Comparación De Numerosa Racionales

Para comparar fracciones con distinto denominador, primero debemos igualarlos buscando **fracciones equivalentes**. Una vez que tienen el mismo denominador, la fracción con el **numerador más grande** es la mayor.

Ejemplo: ¿Es mayor $\frac{8}{9}$ o $\frac{9}{10}$?

i. **Igualamos denominadores:** Buscamos fracciones equivalentes con denominador **90** (MCM entre 9 y 10).

$$\frac{8}{9} = \frac{80}{90} \quad \text{y} \quad \frac{9}{10} = \frac{81}{90}$$

ii. **Comparamos numeradores:** Como 80 es menor que 81.

Conclusión:

$$\frac{8}{9} < \frac{9}{10}$$

Tip rápido: También puedes comparar convirtiendo las fracciones a **números decimales** (dividiendo numerador por denominador) y comparando los números con coma.

2.6. Representación En La Recta Numérica

Para representar una fracción (por ejemplo $\frac{4}{5}$) en la recta numérica, se siguen estos pasos:

i. Se toma el segmento entre **0** y **1** y se divide en tantas **partes iguales** como indica el denominador (en este caso, **5**).

ii. Luego, se cuentan desde el cero tantas partes como indica el **numerador** (en este caso, **4**) y se hace la marcación.

¡IMPORTANTE!

¡Entre dos fracciones siempre es posible encontrar una fracción nueva!

2.7. Operaciones Con Números Racionales Y Decimales.

2.7.1. Suma y Resta de Fracciones

- **Con el mismo denominador:** Se suman o restan directamente los numeradores entre sí y se mantiene el mismo denominador.

Ejemplo:

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$$

- **Con distinto denominador:** Primero se debe encontrar el **MCM** (mínimo común múltiplo) entre los denominadores para obtener fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador.

Ejemplo:

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=$$

i. Buscamos el MCM entre 3 ; 4 y 6 que es $\mathbf{12}$.

ii. Buscamos las fracciones equivalentes:

$$\frac{4}{12}+\frac{9}{12}+\frac{2}{12}=\frac{15}{12}$$

iii. Simplificamos el resultado: $\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$. (Opcional)

Observación: Para realizar la **resta** se procede de igual modo.

2.7.2. Suma Y Resta De Decimales

Cuando operamos con números decimales de forma vertical (utilizando el algoritmo convencional), la regla de oro es **alinear las comas decimales**. Esto asegura que cada cifra ocupe su valor posicional correcto.

i. Escribe los números uno debajo del otro de modo que las comas coincidan en una misma columna vertical.

ii. Si los números tienen diferente cantidad de cifras decimales, se recomienda completar los espacios vacíos con **ceros** para facilitar la cuenta.

iii. **Suma o resta** como si fueran números naturales y coloca la coma en el resultado, justo en la misma columna de las anteriores.

$$\begin{array}{r} 12{,}35 \\ +\;\;4{,}60 \\ \hline 16{,}95 \end{array}$$

Ejemplo: calcular $12{,}35 + 4{,}6$ hacemos

2.8. Multiplicación de Fracciones

Para multiplicar dos o más fracciones, se multiplican los numeradores entre sí para obtener el nuevo numerador, y los denominadores entre sí para obtener el nuevo denominador.

Ejemplo:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Se recomienda **simplificar** cualquier numerador con cualquier denominador antes de multiplicar. ¡Esto hace que los cálculos sean mucho más fáciles!

2.9. Multiplicación De Un Número Natural Por Un Decimal

Se multiplican los números como si ambos fueran naturales. Al finalizar, se coloca la coma en el producto (resultado) dejando la **misma cantidad de cifras decimales** que tenía el factor decimal

Ejemplos: $12 \cdot 0{,}3 = 3{,}6 \quad (una\ cifra\ decimal)$

$5 \cdot 1{,}12 = 5{,}6 \quad (dos\ cifras\ decimales)$

2.10. Multiplicación De Dos Números Decimales

Para multiplicar dos números decimales, primero se realiza la operación como si fueran números naturales, sin tener en cuenta las comas. Luego, en el resultado, se coloca la coma de modo que queden tantas cifras decimales como la **suma de los decimales de ambos factores**

Ejemplo: Multipliquemos $1{,}25 \cdot 2{,}3 =$

i. **Ignoramos las comas** y multiplicamos como naturales: $125 \cdot 23 = 2875$

ii. **Contamos los decimales** de los factores:

1,25 tiene **2** decimales.

2,3 tiene **1** decimal.

En total, el resultado debe tener **3** decimales $(2 + 1 = 3)$

iii. **Colocamos la coma** en el producto contando tres lugares desde la derecha hacia la izquierda.

Resultado: 2,875

2.11. Inverso Multiplicativo.

Cuando el producto de dos números racionales positivos da como resultado **1**, decimos que cada uno es el **inverso multiplicativo** del otro.

i. Dada una fracción $\frac{a}{b}$ con $(a \neq 0 \text{ y } b \neq 0)$ su inverso multiplicativo es $\frac{b}{a}$.

ii. Es decir, el inverso multiplicativo se obtiene invirtiendo el número.

Ejemplo:

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{9}{4} = 1$$

Por lo tanto, el inverso de $\frac{4}{9}$ es $\frac{9}{4}$.

2.12. División De Fracciones

Para dividir fracciones, se mantiene la primera fracción igual, se considera el **inverso multiplicativo** de la segunda fracción y se procede a expresar la operación como una **multiplicación**.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Ejemplo: calcular $\frac{3}{4} : \frac{7}{5} =$

i. Buscamos el inverso de la segunda fracción: el inverso de $\frac{7}{5}$ es $\frac{5}{7}$

ii. Multiplicamos:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$$

2.13. División De Números Naturales Con Resultado Decimal

Cuando dividimos un número natural en partes iguales, el resultado puede ser una expresión decimal exacta o una expresión decimal periódica.

- **Expresión decimal exacta:** Ocurre cuando la división tiene un resto igual a cero en algún punto.

Ejemplo: Al dividir 3 en 4 partes iguales. ¿Qué valor tiene cada parte?

La respuesta es $0{,}75$ y no sobra nada. Es decir: $3 : 4 = 0{,}75$

- **Expresión decimal periódica:** Ocurre cuando el resto nunca es cero y las cifras del cociente comienzan a repetirse indefinidamente.

Ejemplo: Si se divide 7 en 30 partes iguales. Cada parte toma un valor de $0{,}2333\ldots$

En este caso, el resto (10) se repite de forma indefinida.

El resultado es una expresión decimal periódica mixta, ya que tiene una parte decimal que no se repite $(el\ 2)$ y luego una parte que sí lo hace $(el\ período\ 3)$.

Se escribe: $0{,}2\hat{3}$

2.14. Multiplicación Y División Por Potencias De 10

Operar con números como **10, 100, 1.000, etc.**, permite resolver el cálculo de forma directa simplemente desplazando la posición de la coma.

2.14.1. Multiplicación (La coma se corre hacia la DERECHA): Al multiplicar, el número se hace más grande. Movemos la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros tenga el número

Ejemplos: $3{,}45 \cdot 10 = 34{,}5\ (la\ coma\ se\ corre\ un\ lugar\ a\ derecha)$.

$0{,}128 \cdot 100 = 12{,}8\ (la\ coma\ corre\ dos\ lugares\ a\ derecha)$.

$0{,}005 \cdot 1000 = 5\ (la\ coma\ corre\ tres\ lugares\ a\ derecha)$.

2.14.2. División (La coma se corre hacia la IZQUIERDA): Al dividir por 10, 100 o 1.000, el número se hace más pequeño. Movemos la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros tenga el número. Si no alcanzan las cifras, completamos con ceros a la izquierda.

Ejemplo: $0{,}54 : 10 \ = \ 0{,}054$ ($la\ coma\ se\ corre\ un\ lugar\ a\ izquierda$).

$129{,}2 : 100 \ = \ 1{,}292$ ($la\ coma\ corre\ dos\ lugares\ izquierda$).

$42{,}63 : 1.000 \ = \ 0{,}04263$ ($la\ coma\ corre\ tres\ lugares\ a\ izquierda$).

2.15. Truncamiento y Redondeo:

Cuando necesitamos simplificar un número decimal para facilitar cálculos, podemos usar dos formas de **aproximación**:

2.15.1. Truncamiento: Se refiere a reducir el número de dígitos a la derecha del separador decimal, descartando los de menor significancia sin modificar los anteriores.

Ejemplo: Dado $\mathbf{2,4587}$... Si lo truncamos a tres cifras decimales, queda $\mathbf{2,458}$.

2.15.2. Redondeo: Consiste en "ajustar" el número decimal según su valor, para dejarlo con menos cifras decimales siguiendo una regla de proximidad.

Ejemplo: Dado $\mathbf{0,889}$... Si lo redondeamos a una cifra decimal, observamos que:

La segunda cifra decimal es un 8 (mayor que 5), por lo tanto, se suma 1 a la primera cifra decimal. Entonces, nos queda $\mathbf{0,9}$ (observe: 0,889 se encuentra más cerca de 0,9 que de 0,8).

- El símbolo que se utiliza en las aproximaciones es ≈ (se lee "aproximadamente igual a").

¡IMPORTANTE!

Cuando se redondean números dentro de una operación, se acumulan errores que pueden hacer variar significativamente el resultado final del cálculo. Siempre es preferible redondear recién al llegar al resultado final.

Video sugerido: https://www.youtube.com/watch?v=YhxXilO50KM

2.16. Porcentaje Como Número Racional:

El porcentaje es una forma de expresar un número racional como una fracción con denominador 100. Esto permite comparar cantidades de manera sencilla.

2.16.1. Porcentaje en Fracciones: Muchos porcentajes comunes equivalen a fracciones simples que facilitan el cálculo mental:

Ejemplo: Calcular $\frac{3}{4}$ de 60 es lo mismo que calcular el 75% de 60.

Además, como $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ entonces hallar el 75% de un número significa calcular su **tercera cuarta parte**.

Del mismo modo, $\frac{1}{5}$ de 60 es lo mismo que calcular el 20% de 60. Y como $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$, esto equivale a hallar la quinta parte de ese número.

2.16.2. <u>Porcentaje en Decimales:</u> Los decimales también nos ayudan a identificar porcentajes de forma rápida desplazando la coma dos lugares:

Ejemplo:

$$50\% = \frac{50}{100} = 0{,}5 \quad ; \quad 25\% = \frac{25}{100} = 0{,}25$$

$$10\% = \frac{10}{100} = 0{,}1 \quad ; \quad 1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

Observación: Para calcular el porcentaje de cualquier número rápidamente, puedes multiplicar el número por su expresión decimal.

Ejemplo: para el 15% de 200, haces $200 \,.\, 0{,}15 \;=\; 30$.

3. Los Números Enteros

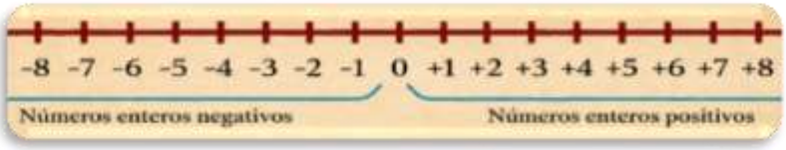
3.1. Numero enteros: El conjunto de los números enteros se simboliza con la letra $\mathbb{Z}$. Está formado por los números enteros negativos (precedidos por el signo $-$), el cero y los números enteros positivos (precedidos por el signo $+$).

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$$

Orden y representación de los números Enteros

3.2. Representación: Para representar los números en la recta numérica, es fundamental seguir estos pasos:

- **i. Marcar el origen:** Se debe señalar el 0 como punto de referencia central.
- **ii. Establecer la unidad:** Se elige una distancia fija (unidad) que debe ser respetada rigurosamente para ubicar al resto de los números, tanto positivos como negativos.
- **iii. Sentido de los números:**
  - Los enteros positivos se ubican a la derecha del cero.
  - Los enteros negativos se ubican a la izquierda del cero.



3.2.1. Criterio de Orden: En la recta numérica, el orden está determinado por la posición relativa de los números. En la recta numérica, los números crecen hacia la derecha, con lo cual:

- Un número es **menor** que cualquier otro que se encuentre **a la derecha**.
- Un número es **mayor** que cualquier otro que se encuentre **a la izquierda**.

Ejemplo: $-5 < -2$ porque el -2 se encuentra a la derecha del -5.

¡IMPORTANTE!

En los **números negativos**, "el que está más cerca del cero es el más grande"

3.3. Valor Absoluto y Números Opuestos:

3.3.1. Valor Absoluto: El valor absoluto de un número entero es la distancia que existe entre ese número y el $\mathbf{0}$ en la recta numérica. Como representa una distancia, siempre es un número positivo o cero.

Ejemplo: El *valor absoluto* de -3 es 3. Se escribe $|\mathbf{-3}| = \mathbf{3}$ y también $|\mathbf{3}| = \mathbf{3}$

3.3.2. Números opuestos: Dos números son opuestos cuando tienen el mismo valor absoluto, pero distintos signos.

Ejemplo: 9 y -9 son números opuesto, porque $|-9| = 9$ y también $|9| = 9$

3.4. Suma Y Resta De Números Enteros:

3.4.1. Suma de igual signo: Para sumar dos números enteros que tengan el mismo signo, se suman sus valores absolutos y al resultado le corresponde el mismo signo.

Ejemplo: $(+5) + (+4) = +9$ y $(-2) + (-8) = -10$

3.4.2. Suma de distinto signo: Si los números tienen signos distintos, se restan sus valores absolutos y al resultado le corresponde el signo del número que tiene el mayor valor absoluto.

Ejemplo: $(-7) + (+2) = -5$ y $(+13) + (-7) = +4$

3.4.3. Resta de enteros: Para restar dos números enteros se suma al primero el opuesto del segundo.

Ejemplo: $8 - (-5) = 8 + (+5) = 13$ y $(-6) - (+5) = (-6) + (-5) = -11$

Video sugerido:
https://www.youtube.com/watch?v=tNxHToZ-LbE

3.5. Multiplicación Y División De Números Enteros

3.5.1. Mismo signo: El producto entre dos números de igual signo es un número positivo.

Ejemplo: $(+2).(+4) = (+8)$; $-(-5) = (-1).(-5) = 5$

3.5.2. División de igual signo: Si se dividen dos números de igual signo, el resultado es positivo.

Ejemplo: $(+12) : (+6) = (+2)$ porque $2 . 6 = 12$
$(-12) : (-6) = 2$ porque $2 . (-6) = -12$

3.5.3. Distinto signo: El producto entre dos números de distinto signo es un número negativo.

Ejemplo: $2 . (-3) = -6$

3.5.4. División de distinto signo: Si se dividen dos números de distinto signo, el resultado es negativo.

Ejemplo: $12 : (-6) = -2$ porque $(-2) . (-6) = 12$
$(-12) : 6 = -2$ porque $(-2) . 6 = -12$

Observación: Tener presente la siguiente regla de los signos

Regla de signos

División	Multiplicación
$+ \div + = +$	$+ \times + = +$
$+ \div - = -$	$+ \times - = -$
$- \div - = +$	$- \times - = +$
$- \div + = -$	$- \times + = -$

3.6. Propiedad Distributiva:

La propiedad distributiva permite "repartir" una operación sobre una suma o una resta.

3.6.1. Con respecto a la multiplicación: la multiplicación siempre es distributiva respecto a la suma y la resta, ya sea que el factor esté a la derecha o a la izquierda.

En símbolos si a, b y c son números enteros, entonces:

$$(a + b).c = a.c + b.c \quad ; \quad a.(b + c) = a.b + a.c.$$

Ejemplo: $(-5+2).(-2) = (-5).(-2) + 2.(-2)$

3.6.2. Con respecto a la división: La división es distributiva con respecto a la suma y la resta si y solo si la suma o la resta son el dividendo (es decir, están a la izquierda del signo de división).

En símbolos si a, b y c son números enteros, entonces:

$$(a + b) : c = a : c + b : c$$

Ejemplo: $(-20+5) : (-5) = (-20) : (-5) + 5 : (-5)$

3.7. Supresión de Paréntesis:

- **Si un paréntesis está precedido por un signo más** $(+)$: Se puede eliminar el paréntesis y ***conservar el signo*** de cada término dentro de él. El signo más que precede al paréntesis también se elimina.

  Ejemplo: $8 + (3 - 5 + 1) = 8 + 3 - 5 + 1$

- **Si un paréntesis está precedido por un signo menos** $(-)$: Se puede eliminar el paréntesis y ***cambiar el signo*** de cada término dentro de él. El signo menos que precede al paréntesis también se elimina, indicando que se ha realizado la operación de resta sobre todo el contenido.

  Ejemplo: $7 - (2 + 3 - 5) = 7 - 2 - 3 + 5$

3.8. Operaciones Combinadas:

Para resolver un cálculo donde aparecen varias operaciones, debemos respetar un orden de prioridad (jerarquía). Seguí estos pasos para no perderte:

i. **Separar en términos y resolver paréntesis:** Los signos $+$ y $-$ (que están fuera de los paréntesis) funcionan como "muros" que separan el cálculo en bloques llamados términos.

   Primero, resuelve todas las operaciones que estén dentro de los paréntesis.

ii. **Multiplicaciones y divisiones:** Una vez que los paréntesis desaparecieron (o se redujeron a un solo número), resuelve las multiplicaciones y divisiones dentro de cada término, **siempre de izquierda a derecha**.

iii. **Sumas y restas:** Finalmente, cuando solo queden sumas y restas, resuelve el cálculo. Para evitar errores de signo, lo ideal es avanzar de izquierda a derecha.

Ejemplo: calcular $(-12-3): 3 + 4.(-2) + 8.(-1) =$

- Separar en términos y resolver los paréntesis: $(-12-3): 3 + 4.(-2) + 8.(-1) =$
- Luego se resuelven las multiplicaciones y divisiones: $(-15): 3 + 4.(-2) + 8.(-1) =$
- Luego las sumas y restas de izquierda a derecha, es decir: $-5 - 8 - 8 =$
  $-5 - 8 - 8 = -21$

3.9. Expresiones Algebraicas

Una expresión algebraica es una combinación de **números y letras** unidos por una o más operaciones matemáticas.

- **Partes de una expresión algebraica:** En una expresión como $-3x^2$:

- El número (-3) se denomina **coeficiente**.
- La letra con su exponente (x^2) forman la **parte literal**

➢ **Clasificación:**
- Cuando la expresión está formada por **un solo término**, se denomina **monomio**.
  Ejemplo: $7n^3$
- Si posee **dos términos** (unidos por un $+$ o un $-$), se la llama **binomio**.
  Ejemplo: $a^2 - 2$

➢ **Monomios Semejantes:** Dos monomios son semejantes cuando tienen la **misma parte literal**.

Ejemplos:
- $3x^2$ y $-5x^2$ son semejantes.
- $3a$ y $3b$ no son semejantes (tienen distinta letra).
- $3x^2$ y $7x^3$ no son semejantes (tienen distinto exponente).

➢ **Valor Numérico:** Se obtiene reemplazando las letras por números determinados y resolviendo las operaciones.

Ejemplo: Si $x = 2$, el valor numérico de $3x + 1$ es: $3\,.(2) + 1 = 6 + 1 = 7$

➢ **Expresiones Equivalentes:** Dos expresiones son equivalentes si, al reemplazar las letras por cualquier número, dan siempre el mismo valor numérico.

Ejemplo: $2\,.(x+3)$ y $2.x + 6$ son **equivalentes**.

- Esto sucede porque, para cualquier número que elijamos para x, al resolver ambas expresiones llegaremos al mismo resultado (aplicando la propiedad distributiva).
- Se puede escribir entonces: $2\,.(x+3) = 2.x + 6$

Operación	Regla	Ejemplos
Suma y Resta	Para sumar o restar monomios semejantes, se suman o restan los coeficientes y se escribe a continuación la misma parte literal.	$4a + 6a = 10a$ $6b + 3a + b = 3a + 7b$
Multiplicación y División	Para multiplicar o dividir dos monomios, se multiplican o dividen los coeficientes, por un lado, y las partes literales por el otro.	$4a^2 \cdot 3a = 12a^3$ $15x^4 : 3x^3 = 5x$

¡IMPORTANTE!

Recuerda: Al multiplicar letras iguales, se suman los exponentes. Al dividir, se restan.

3.10. Propiedad distributiva y Factor Común

La multiplicación es **distributiva** con respecto a la suma y a la resta. Esto nos permite transformar un producto en una suma o resta de términos.

Ejemplos: $(4a + 3).2a = 4a\,.2a + 3\,.2a = 8a^2 + 6a$

$$(3a+1).(2a+1) = 6a^2 + 2a + 3a + 1 = 6a^2 + 5a + 1$$

3.10.1. Extracción de Factor Común (El camino inverso): Las sumas y restas también se pueden expresar como un producto. Al número o letra que divide exactamente a todos los términos de una expresión se lo denomina Factor común.

- **Factor común numérico:** Buscamos el mayor divisor posible de los coeficientes.

  Ejemplo: En $8x + 12$, ambos números están en la tabla del 4. $8x + 12 = 4 \,.\, (2x + 3)$

- **Factor común literal:** Para extraer el factor común de la parte literal, se escribe la letra que aparece en todos los términos, con el **menor exponente** que tenga.

  Ejemplo: En $5x^3 - 2x^2$, la letra x se repite. El menor exponente es 2.

  $$5x^3 - 2x^2 = x^2 \,.\, (5x - 2)$$

- **Ejemplo combinado (con varias letras):** Si tenemos $7x^2y^3 - 14xy^2$ el factor numérico es 7. Como ambos términos tienen x e y, el factor común literal será el de menor exponente para cada una (x e y^2).

  $$7x^2y^3 + 14xy^2 = 7xy^2 \,.\, (xy + 2y)$$

3.10.2. Propiedad Distributiva en la División: La división es distributiva solo cuando la suma o la resta están en el lugar del dividendo (el primer número, o la parte de arriba de una fracción).

Ejemplo:

- correcto (Distribuyendo el dividendo): $(10x + 15) : 5 = 10x : 5 + 15 : 5 = 2x + 3$
- En cambio, NO es distributiva en el divisor: $20 : (x + 4) \neq 20 : x + 20 : 4$

4. Función De Proporcionalidad Directa e Inversa

4.1. Dos variables (x e y) están en relación directamente proporcional cuando:

- Al aumentar una, la otra también aumenta en la **misma proporción** (si una se duplica, la otra también).
- Al disminuir una, la otra también disminuye proporcionalmente (si una es la tercera parte, la otra también).

Ejemplo: Un caso de **proporcionalidad directa**

En la balanza digital de una panadería se ven cómo cambia el importe a pagar a medida que se agrega o quita pan del plato. La balanza relaciona la cantidad que se pesa y el importe, de manera que internamente multiplica el precio del kilogramo por la cantidad de pan que se registra en ese momento.
Teniendo en cuenta la siguiente tabla (incompleta)

Cantidad de pan (kg)	2		6	1		8	10
Importe ($)		18		4,5	22,5		

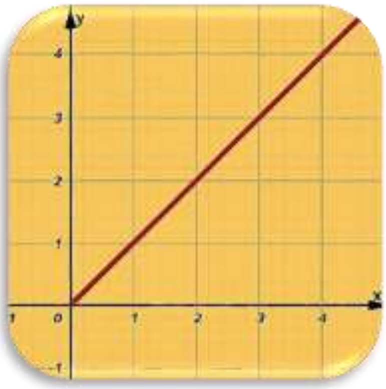
¿Cómo se podría determinar la razón entre cada par de valores que se corresponden en la tabla?
La **cantidad** y el **importe** se relacionan de manera **directamente proporcional**: al aumentar la cantidad de pan al doble, el importe se duplica; si la cantidad de pan se triplica, el importe también.

Cuando dos variables se relacionan de manera directamente proporcional**, la razón** entre sus valores correspondientes **es constante**.

4.1.1. La constante de proporcionalidad ($\boldsymbol{k}$): En estas funciones, si dividimos el valor de $\boldsymbol{y}$ por el de $\boldsymbol{x}$, siempre obtendremos el mismo número, llamado constante de proporcionalidad.

$$\frac{y}{x} = k$$

4.1.2. Representación Gráfica: Los puntos que corresponden a una función de proporcionalidad directa siempre están sobre una recta que pasa por el origen de coordenadas $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$.



Los números racionales a, b, c *y* d forman una **proporción numérica** si la razón entre los dos primeros es igual a la razón entre los dos últimos.

Se escribe:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \text{con } b \text{ y } d \text{ distinto de } 0$$

Y se cumple la **Propiedad Fundamental de las Proporciones**: El producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$a\,.\,d = b\,.\,c$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{5} \text{ y } \frac{4}{10}$$

forman una proporción porque: $2\,.\,10 = 20$ y $5\,.\,4 = 0$

Video sugerido: https://www.youtube.com/watch?v=B3_-MhYEkEk

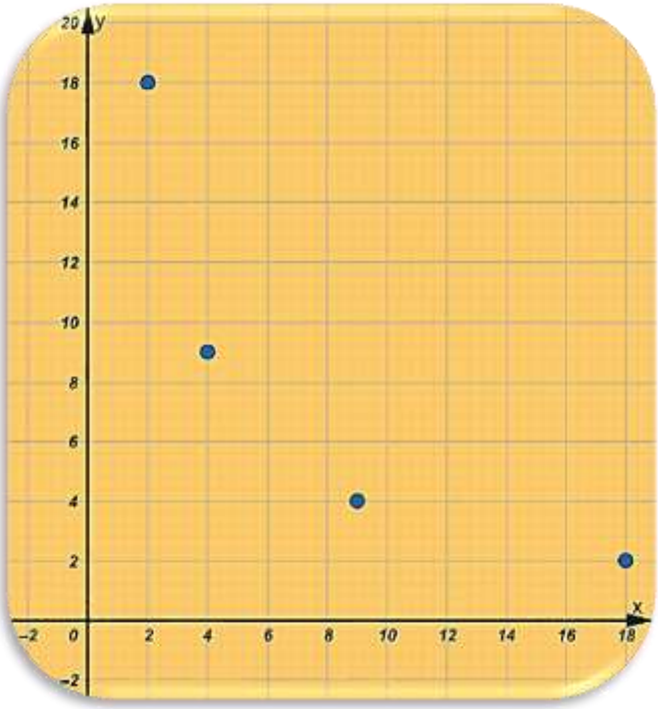
4.2. Función de Proporcionalidad Inversa

Supongamos el siguiente caso: **"Juli quiere comprarle a su mamá un regalo que cuesta $60. Decide ahorrar todos los días la misma cantidad de dinero. La cantidad de días que va a demorar en juntar los $60 está en función de lo que ahorre cada día"**.

- Si ahorra **$2** por día, tardará **18 días**.
- Si ahorra **$4** por día (el doble), tardará **9 días** (la mitad).
- Si ahorra **$9** por día (el triple), tardará **4 días** (la tercera parte).

Gráfica de la situación:

El ahorro diario y la cantidad de días se relacionan de manera **inversamente proporcional**, porque al aumentar una variable, la otra **disminuye en la misma proporción**.



4.2.1. Propiedades clave:

- **La curva:** Los puntos de una función de proporcionalidad inversa no forman una recta, sino una línea curva llamada **hipérbola**. Esta curva se acerca a los ejes, pero nunca los toca.

- **La constante ($\boldsymbol{k}$):** En la proporcionalidad inversa, si multiplicamos las dos variables, el resultado es siempre el mismo (en este caso, $x.y = 60$).

  Si se llama x e y a esas variables, entonces $x.y = k$. El valor de $\boldsymbol{k}$ es la **constante de proporcionalidad inversa**.

  Ejemplo: Un pedido de empanadas será envasado en cajas; en cada caja se pondrá la misma cantidad de empanadas.

Empanadas por caja	2	4		8	12		
Número de cajas	36		12			4	3

  La **cantidad de empanadas por caja** y el **número de cajas** se relacionan de manera inversamente proporcional: al aumentar las empanadas por caja al doble, la cantidad de cajas se reduce a la mitad; si la cantidad de empanadas es el triple, la cantidad de cajas se reduce a la tercera parte.

  Video sugerido:
  https://www.youtube.com/watch?v=Vp85Jzpk4Fo

5. Geometría:

Los siguientes son los temas que presentaremos a lo largo del cuadernillo, que son acompañados por las guías prácticas que se trabajarán en los encuentros.

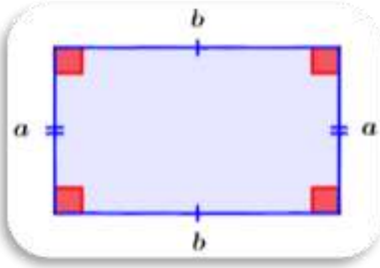
- **En el plano:** las figuras y sus elementos.
- **En el espacio:** los cuerpos.
- **Medida:** ¿qué podemos medir en las figuras?, ¿qué podemos medir en los cuerpos?, ¿con qué medimos?
- **Ubicación:** coordenadas cartesianas en el plano

Te ofrecemos este apunte teórico, que sigue a continuación, para que puedas consultar definiciones y ejemplos; de esta manera aquí podrás encontrar ayuda para resolver las actividades.
Por otro lado, también tendremos los TP (trabajos prácticos) en los que encontrarás las actividades para resolver.

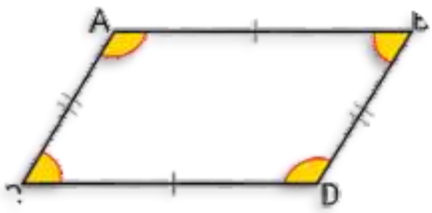
Ejemplo: si al leer encuentras esto:

Rectángulo: figura geométrica de cuatro lados de dos longitudes distintas, tal que los lados opuestos tienen igual longitud; además estos lados forman cuatro ángulos rectos.

Es porque encontraste una definición teórica de un concepto.
Este es un ejemplo (gráfico):



Y este es un contraejemplo, porque "hay una parte" de la definición que no se cumple:



Por último, te recomendamos LEER varias veces, pero debes tener en cuenta que en matemática LEEMOS:

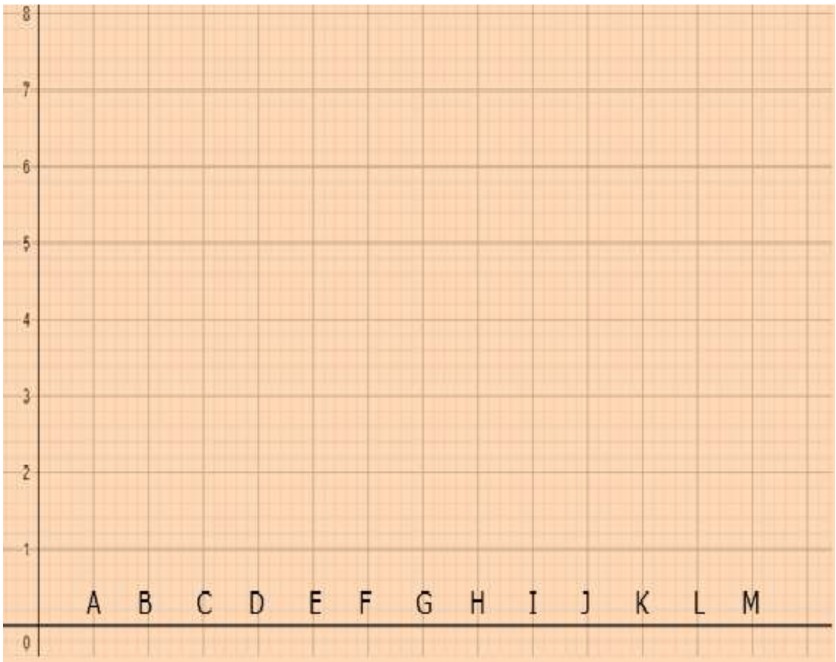
- PALABRAS - CONCEPTOS
- SÍMBOLOS
- IMÁGENES (DIBUJOS - GRÁFICOS)

¡IMPORTANTE!

Anota todas las dudas, por ejemplo, las palabras desconocidas - los símbolos desconocidos – etc. y acordate de tenerlas a mano para las clases.

5.1. Coordenadas Cartesianas

¿Puedes indicar en donde se ubica el asiento de Paloma?



En matemática, del mismo modo que en la ciudad (en la que indicas tu dirección con una calle y una altura o número), usamos un Sistema De Referencia.

Un sistema que nos permite orientarnos y poder ubicarnos en el plano, se llama **cartesiano**. En este sistema (el plano cartesiano) se emplean dos ejes perpendiculares y en cada uno de estos ejes se realiza una graduación (pensamos estos ejes como rectas numéricas).
Las coordenadas cartesianas, son los datos que necesito para UBICAR. Nosotros vamos a ubicar puntos en el plano, para ello usaremos DOS datos, nuestras dos coordenadas cartesianas forman un **par ordenado**, el primer valor es un valor sobre el eje de las **abscisas** (eje horizontal) y el segundo valor sobre el eje de las **ordenadas**.

Observa las siguientes imágenes, que muestran los elementos del plano cartesiano (primera imagen) y cómo ubicamos un punto en dicho plano (segunda imagen).

Si al leer nos encontramos con la siguiente escritura: $(2\,;3)$ esta es la forma en que escribimos la ubicación del punto.

Desde el origen (el punto azul) y en ORDEN, tomas cada uno de los valores y te desplazas en el plano en dos direcciones primero horizontal $(2\ unidades)$ y desde ahí subes en vertical $3\ unidades$.

El primer valor $(la\ abscisa\ 2)$ se refiere a dos unidades desde el origen a la derecha, mientras que el SEGUNDO valor (la ordenada 3) son tres unidades hacia arriba. Al finalizar ese recorrido, ubicamos el punto A

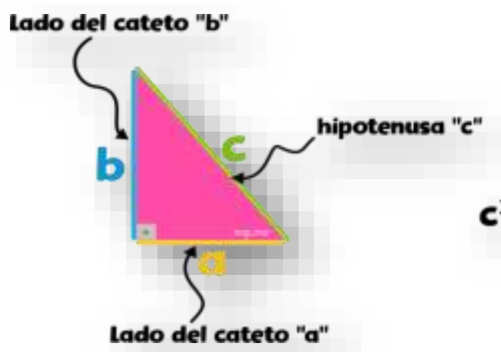
6. Teorema de Pitágoras

En la primera imagen, se usa el teorema de Pitágoras para "triangular" y ubicar; en la segunda imagen vemos a un trabajador de la construcción verificando que esté en escuadra los futuros cimientos de la construcción. Por último, en la tercera imagen, encontramos a una persona que intenta acomodar un mueble apoyándolo sobre la pared.
Todos son casos del uso que le damos al teorema de Pitágoras, probablemente sin saberlo.

Pitágoras, entre muchos otros aportes, nos dejó un teorema que relaciona las medidas de los lados de un triángulo (pero no cualquiera), este triángulo debe ser un **triángulo rectángulo.**

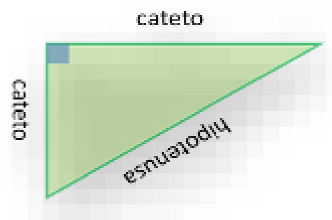
7. Triángulo Rectángulo

(Uno de los ángulos interiores mide exactamente 90°).
Para tener en cuenta: De los tres lados del triángulo rectángulo, dos se llaman **CATETOS**, el tercer lado se llama **HIPOTENUSA**.

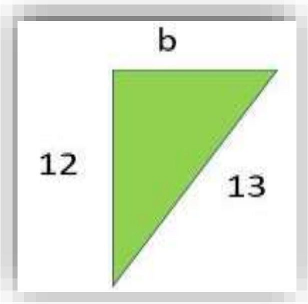


$$c^2 = b^2 + a^2$$

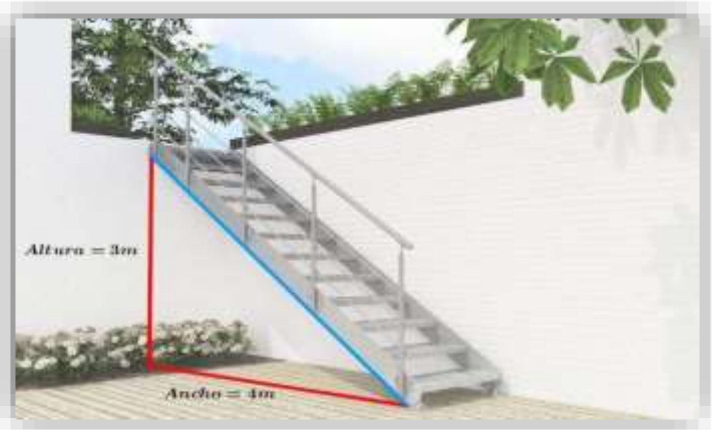
¿Cómo distingo a la hipotenusa de un cateto?
La hipotenusa es el lado que se **OPONE** al ángulo recto y cuando conozco las tres medidas debe ser el lado de mayor longitud.



Plantea y resuelve el triángulo, cuyos lados son $12, 13$ y b.



¿La siguiente pared estará bien construida?



Analizaremos la imagen, las paredes con el suelo son perpendiculares (es decir forman entre ellas un ángulo de 90°), por lo tanto, tomando la relación entre pared-suelo-escalera tenemos un triángulo rectángulo. Se debe cumplir:

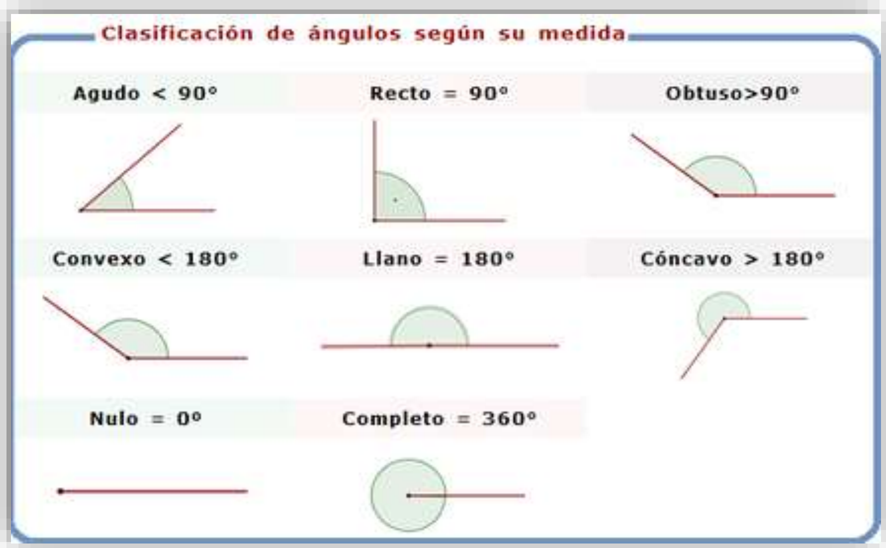
$$3^2 + 4^2 = E^2 \qquad 9 + 16 = E^2 \qquad 25 = E^2 \quad \text{entonces} \quad E = 5$$

Estos cálculos quieren decir que, si apoyo una escalera que tenga $5\ m$ de largo a una distancia de $4\ m$ de la pared, el extremo superior de la escalera debe quedar en el borde de la pared que está a $3\ m$ del suelo.

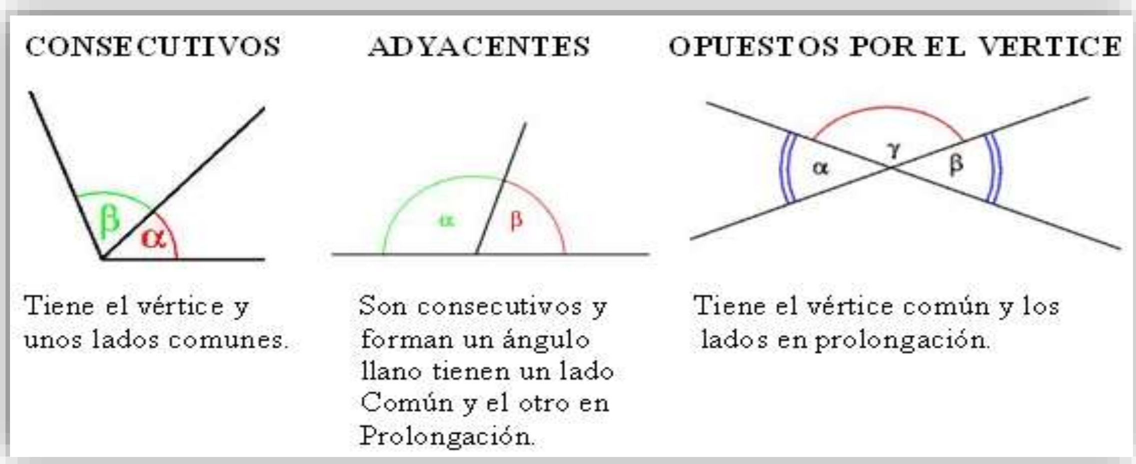
8. Ángulos

En geometría se parte de algunos conceptos básicos como por ejemplo **Punto** y **Recta**. Si tomamos dos rectas y "jugamos" con sus posiciones estas pueden cruzarse, es decir pueden tener intersección si esto pasa, la intersección es un punto. Para el caso de un **Ángulo**, pensamos en dos rectas que se intersecan, queda así determinado el **Vértice** (punto de intersección) y sus **Lados** (dos de las **semirrectas** que se forman en la intersección).

Estas aberturas, los ángulos, se clasifican de acuerdo con su medida:



Pero si consideramos su posición, tenemos los siguientes ángulos:

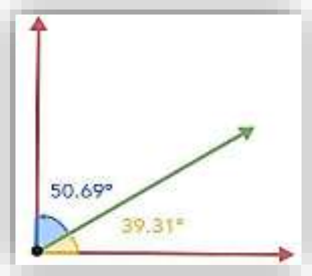


Observación: los ángulos que llamamos **Opuestos Por El Vértice** son ángulos que pueden visualizarse como los que quedan conformados por la intersección (cruce) entre dos rectas secantes.

Los ángulos que son opuestos por el vértice comparten una propiedad: **Miden Lo Mismo**.

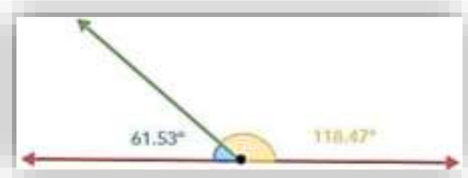
También puedes ver ¿qué es lo que obtienes cuando tomas dos ángulos con ciertas posiciones o, mejor dicho con cierta relación como veremos en las siguientes imágenes? Puedes obtener:

i. Complementos:



Estos dos ángulos (el arco de color celeste y el arco de color amarillo) se llaman **<u>Complementarios</u>**, al sumar sus medidas ($50{,}69° + 39{,}31°$) obtienes $90°$

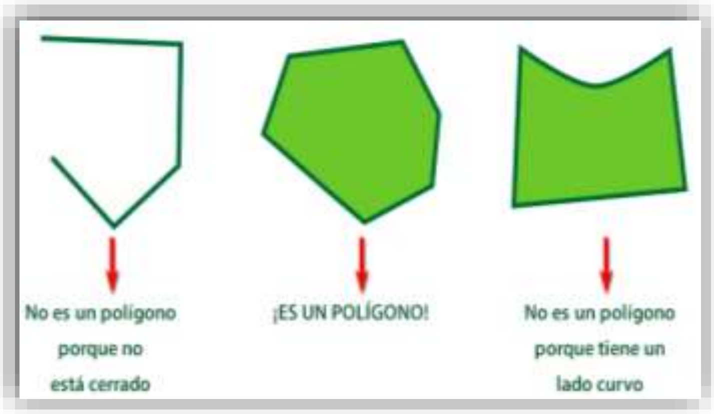
ii. Suplementarios



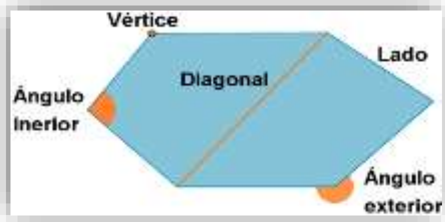
Mientras que, en este caso, se llaman **<u>Suplementarios</u>**, porque la suma de las dos medidas da por resultado $180°$ ($61{,}53° + 118{,}47° = 180°$).

9. *<u>Figuras Planas</u>*

Un **POLÍGONO**, es una figura plana cerrada formada o delimitada por segmentos (los segmentos son rectos)



- Los segmentos, son llamados **LADOS**
- El punto de unión o encuentro de los segmentos es llamado **VÉRTICE**
- Si un segmento une dos vértices (que no están conectados, por un lado), se llama **DIAGONAL**

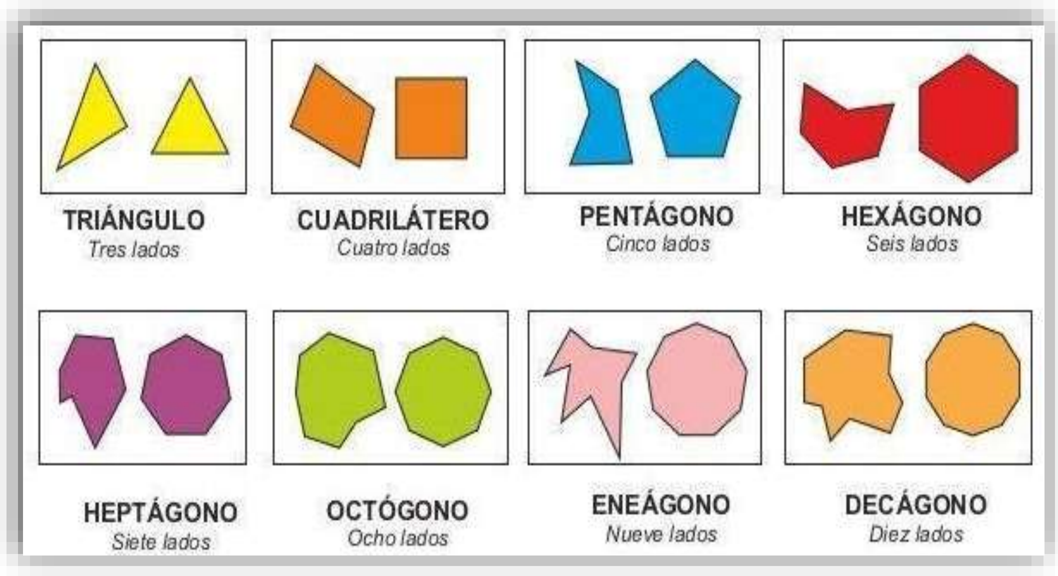


Un polígono es **Cóncavo** cuando existen un par de puntos interiores, que, al unirlos con un segmento, este segmento no está en el interior del polígono.

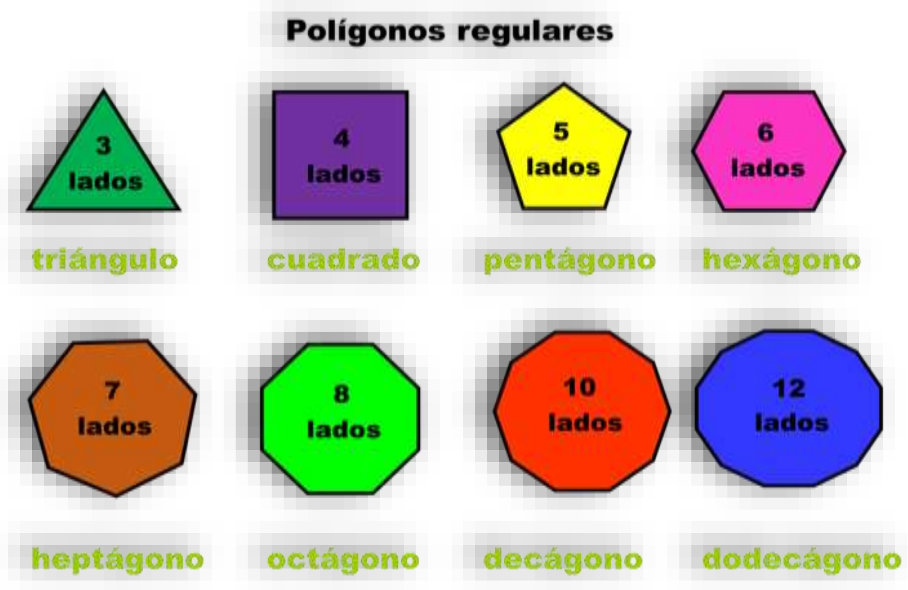
Ejemplo:

Si el polígono **NO** es cóncavo, se llama **CONVEXO**.

De acuerdo con la **cantidad de lados**, recibe su nombre:



Si el polígono tiene sus lados y ángulos (internos) iguales, se llama **REGULAR**. Si no sucede, se llama **IRREGULAR.**



10. Los Ángulos de un Polígono

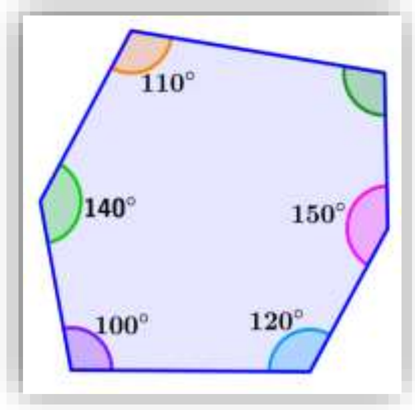
La suma de los ángulos interiores (que abreviamos con la sigla SAI) de un polígono de una cantidad "n" de lados se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$180° \,.\, (n - 2) = SAI$$

Esto quiere decir que si el polígono tiene 7 lados:

$$n = 7 \quad \text{luego} \quad SAI = 180°.(7-2) = 180° \,.\, 5 = 900°$$

es decir, al sumar las 7 medidas de los 7 ángulos se obtiene, en total, 900°

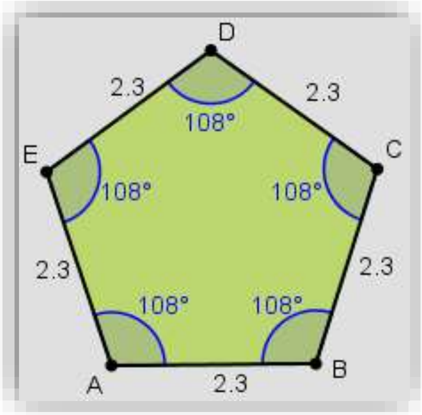


Sabiendo que $SAI = 900$, responde
¿Cuál es el valor del ángulo desconocido del heptágono (irregular) de la imagen?
O bien si el polígono es regular, como el siguiente pentágono (que tiene cinco lados y cinco ángulos, además sus ángulos son todos iguales):

$$SAI = 180° \text{ x } (5-2) = 180° \text{ x } 3 = 540°$$

Y estos 540° son el resultado de cinco medias iguales, entonces:

$540° \div 5 = 108°$ (la medida de cada uno de los ángulos)



¡IMPORTANTE!

Para el signo de la operación multiplicar, quizás hasta ahora usaste “x” para indicar la multiplicación, pero puedes encontrar que otros signos para lo mismo sean “∗” o “.”, es decir el asterisco o el punto.

11. Perímetro y Área de Figuras Planas

Lee con atención:
Hay que poner postes y alambres alrededor de un terreno de 25 m de frente y 50 m de fondo. Los postes se colocan en las puntas y sobre los lados cada 5 metros. Luego se pasan 5 hileras de alambre y en los extremos se usan 1,5 m para atar cada hilera.

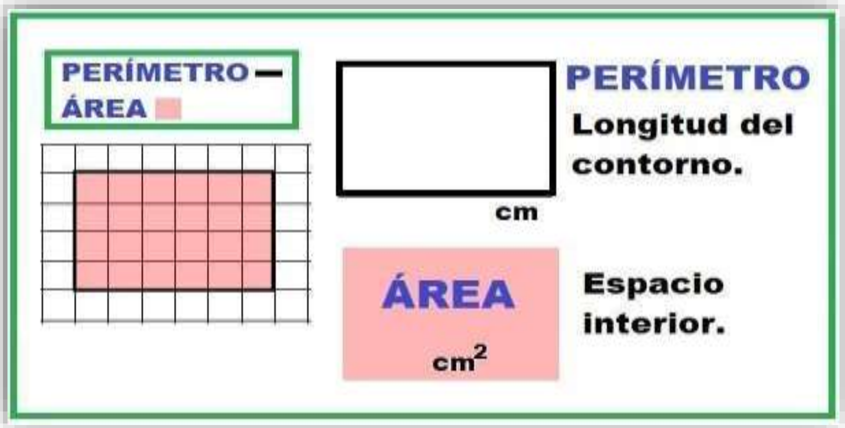
Dibuja la situación y responde: ¿cuántos postes y metros de alambre necesitan comprar?

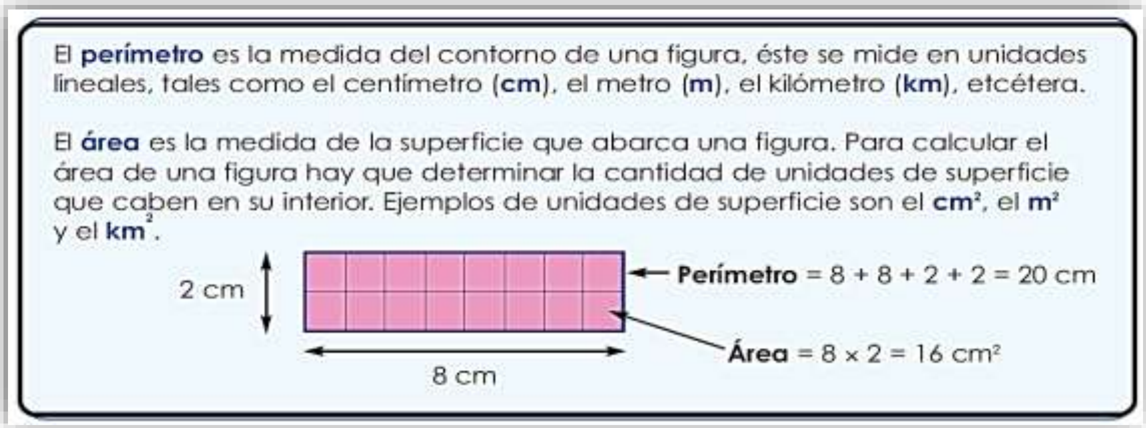
Las figuras planas, cuando las observas, tienen “un borde” que está formado por los **lados**. De esa figura se pueden definir dos cosas:

PERÍMETRO es la medida del contorno de la figura. Esta medida la obtenemos SUMANDO las longitudes (medidas) de los lados.

ÁREA es la medida de la superficie (región) que queda comprendida en el **interior** de la figura.

Observación: la forma en que calcules el área depende de la figura que estés trabajando.

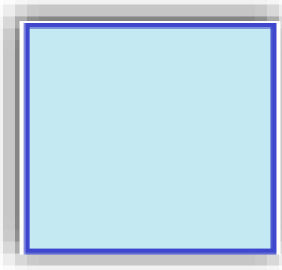




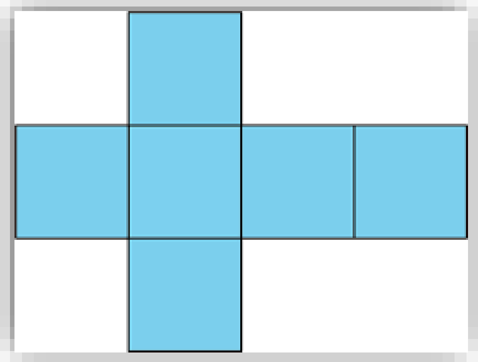
Responde: la situación planteada al principio, en la que debía alambrarse el terreno, ¿es un problema de área o de perímetro?

12. *Cuerpos*

En el plano tenemos por ejemplo los cuadrados:



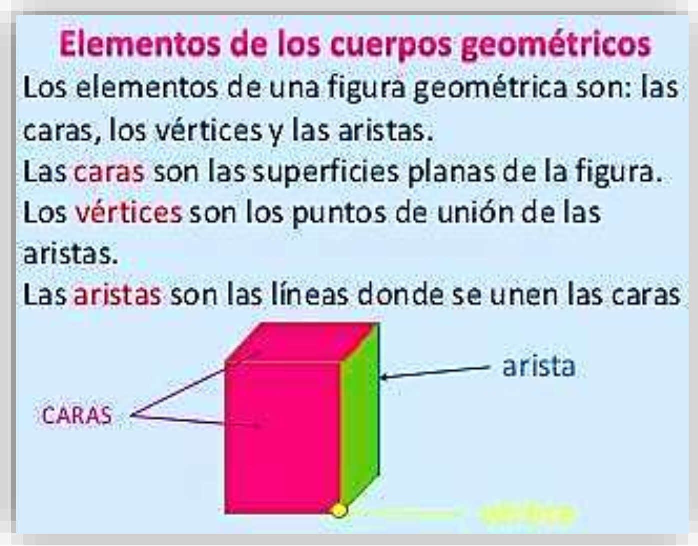
La figura representada anteriormente tiene dos dimensiones alto y largo.
Si tomamos varios cuadrados y los unimos en un cierto orden obtenemos:



Y si plegamos (doblamos) obtenemos:

Esta figura tiene tres dimensiones: alto, largo y ancho; es un cuerpo y se llama CUBO o también ORTOEDRO (es un cuerpo regular).Tiene tres dimensiones: alto, largo y profundidad

Elementos y clasificación:

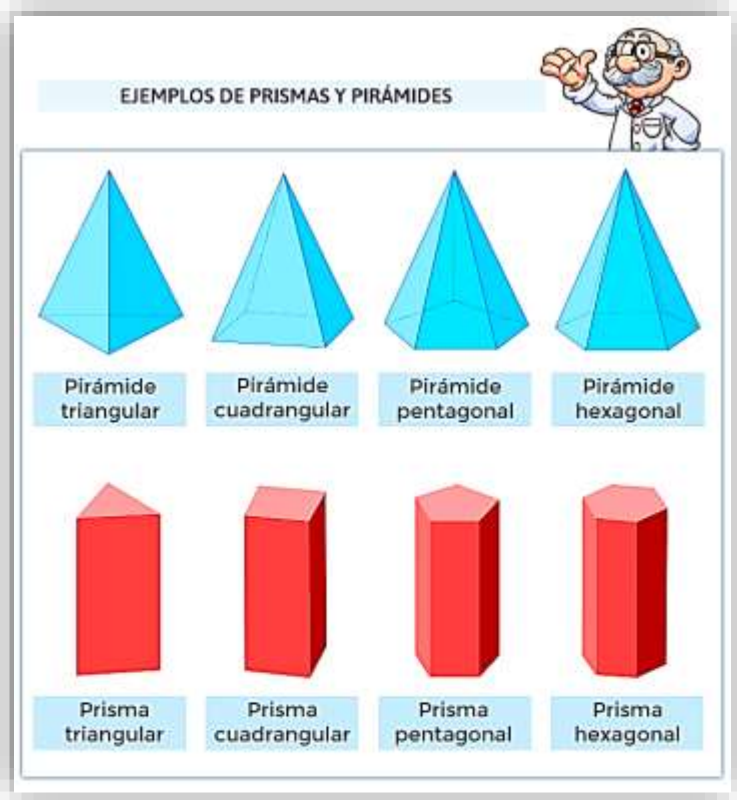


Los cuerpos que tienen todas sus caras planas se llaman **poliedros.**
Aquellos cuerpos que apoyados sobre una de sus caras pueden rodar, se llaman cuerpos **redondos.**

Además, un poliedro que tiene por lo menos un par de caras paralelas e iguales y las otras caras son paralelogramos, se llama **PRISMA**.

Bases: son las caras paralelas.

Si todas sus caras laterales son triángulos, se llama **Pirámide.**

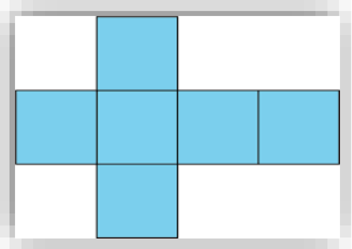


12.1. Cuerpos redondos

Son los cuerpos que tienen parte o toda su superficie curva, los más conocidos son

Para saber ¿cuánto papel necesitamos para forrar la caja? Estamos ante la idea de **área total** del cuerpo.

Para calcular el papel, podemos imaginar la caja "desarmada" (a esto llamamos **desarrollo plano**) y calculamos las áreas de cada polígono que observemos.



Ahora bien, para calcular la capacidad (¿cuánto puede caber en el interior?), pensamos en la noción de **volumen.**

Como la siguiente lata de gaseosa (**cuerpo cilíndrico**) que tiene una capacidad de $354ml$, es decir esa es la cantidad de líquido que contiene en el interior

En la última sección, bajo el título "ANEXO", encontrarás las fórmulas que te permitirán resolver rápidamente las actividades.
Para poder emplearlas debes:

i. Identificar el cuerpo ¿es un prisma o es cilindro?
ii. Identificar el concepto, ¿es un problema de área o de volumen?
iii. Identificar en el cuerpo los datos, ¿es altura? O ¿es profundidad?
iv. Aplicar en la fórmula correspondiente los datos correctos

Ejemplo: Se quiere determinar la cantidad de lona necesaria para levantar una carpa, cuya altura de inclinación es de $3m$ y arista $1m$

Este cuerpo tiene una base que es un cuadrado y sobre el cuadrado cuatro triángulos, es una pirámide.
Si quiero armar una carpa, el concepto que corresponde es el de área por eso calculamos:

$$A = A_{base} + A_{lateral}$$

La base es un cuadrado de lado= 1m y los laterales son tres triángulos iguales cuyas medidas son 1m de base y 3m de altura (observa la representación del cuerpo).

$$A_{base\ cuadrada} = 1\,.\,1 = 1\,m^2 \qquad A_{triángulo\ lateral} = \frac{1\,.\,3}{2} = 1{,}5\,m^2$$

De este modo sabemos que la carpa necesita $4{,}5\,m^2$ de lona (son cuatro triángulos para los laterales y un cuadrado de base $4 * 1{,}5\,m^2$ y $1\,m^2 = 7\ m^2$.

13. Simela

Observen los siguientes objetos:

¿Qué podemos medir de estos objetos? ¿Con qué y cómo medimos?

Tomemos el ejemplo de las visitas al doctor, el médico no sólo nos mide el alto sino también el peso.

Para medir debemos tomar una unidad, acordar cómo se van a tomar las medidas; así en nuestro país existe **SIMELA** (sistema métrico legal argentino) donde nos indica que:

- La longitud las medimos con la unidad de medida llamada **Metro**, su símbolo es $\boldsymbol{m}$
- El área se mide con el **Metro Cuadrado** (tomamos dos "características" el largo y el ancho), su símbolo es $\boldsymbol{m^2}$
- El volumen lo medimos con la unidad **Metro Cúbico**, su símbolo: $\boldsymbol{m^3}$ (consideramos largo, ancho y alto para saber así "cuanto entra en el interior")

Ahora bien, algunos objetos a medir son muy grandes y otros muy pequeños por eso tenemos unidades mayores (múltiplos) a la unidad y menores (submúltiplos) a la unidad.

Los objetos como las siguientes imágenes, las medimos con la regla así la unidad de medida es un submúltiplo, el centímetro (cm)

Pero: ¿Medirías con la regla de tu cartuchera esta construcción?

En este caso se mide en metros (podemos usar la cinta métrica, porque la regla no es el instrumento o herramienta adecuada)

UNIDADES DE CAPACIDAD						
Kilólitro	Hectólitro	Decálitro	litro	decílitro	centílitro	mililitro
Kl.	Hl.	Dl.	l.	dl.	cl.	ml.
1.000 l.	100 l.	10 l.	1 l.	0,1 l.	0,01 l.	0,001 l.

UNIDADES DE VOLUMEN						
Kilómetro cúbico	Hectómetro cúbico	Decámetro cúbico	metro cúbico	decímetro cúbico	centímetro cúbico	milímetro cúbico
Km^3	Hm^3	Dm^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
1.000.000.000 m^3	1.000.000 m^3	1.000 m^3	1 m^3	0,001 m^3	0,000001 m^3	0,00000000 m^3

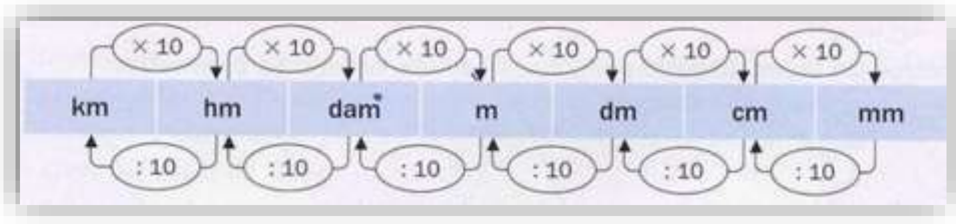
UNIDADES DE SUPERFICIE						
Kilómetro cuadrado	Hectómetro cuadrad	Decámetro cuadrad	metro cuadrado	decímetro cuadrado	centímetro cuadrad	milímetro cuadrado
Km^2	Hm^2	Dm^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
1.000.000 m^2	10.000 m^2	100 m^2	1 m^2	0,01 m^2	0,0001 m^2	0,000001 m^2

UNIDADES DE LONGITUD						
Kilómetro	Hectómetro	Decámetro	metro	decímetro	centímetro	milímetro
Km.	Hm.	Dm.	m.	dm.	cm.	mm.
1.000 m.	100 m.	10 m.	1 m.	0,1 m.	0,01 m.	0,001 m

Para poder "pasar" entre múltiplos, unidad y submúltiplo podemos usar las siguientes reglas prácticas:

i. Si voy de unidad "más grande" o a la derecha, hacia una unidad menor (que está a la izquierda) MULTIPLICO.
ii. Si voy de submúltiplo o de unidad pequeña a unidad mayor, divido

Cuando cambio en unidad de medida de longitud



Ejemplo: $4{,}6\ km$ a dm

(el cambio es de una unidad "grande" a una "pequeña" que está hacia la izquierda, entonces voy multiplicando)

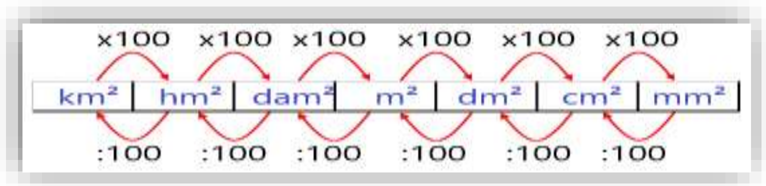
$$4{,}6 \text{ x } \mathbf{10 \text{ x } 10 \text{ x } 10 \text{ x } 10}\ km \ = \ 46.000\ dm$$

(observa la cantidad de unidades que cambias desde $\boldsymbol{km}$ **hasta** $\boldsymbol{dm}$, el primer cambio es km a hm, el segundo de hm a dam, el tercero es de dam a m y por último el cuarto cambio es de m a dm).

En cambio, si hubiera sido de $23\ cm$ a m entonces hubiéramos dividido de la siguiente manera:

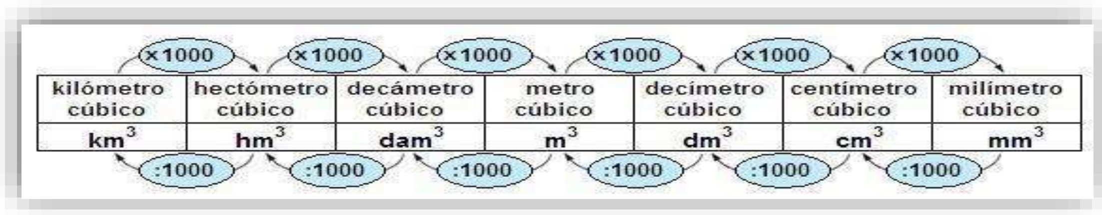
$$23 : \ \mathbf{10} : \mathbf{10}\ cm \ = 0{,}23\ m$$

Cuando cambio en unidad de medida de área



En este cambio debemos **multiplicar o dividir por** $\mathbf{100}$

Cuando cambio unidad de medida en volumen



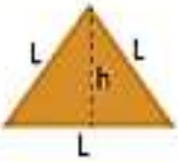
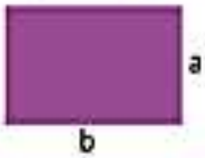
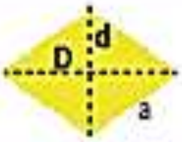
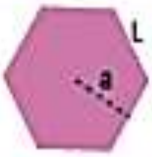
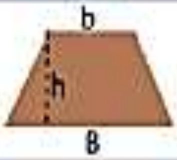
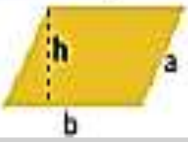
En este caso el cambio es operar **(multiplicar o dividir) por** $\mathbf{1000}$

Por último, en matemática hablamos de volumen, pero en la vida real, relacionamos con capacidad, para ello podemos usar la siguiente relación:

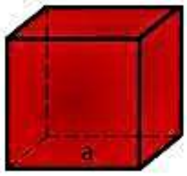
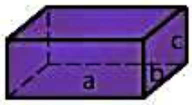
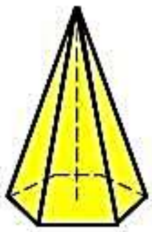
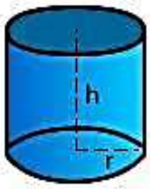
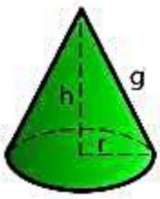
$$1dm^3 \ = 1\ litro$$

Múltiplos	Kilolitro	kl	1000 litros
	Hectolitro	hl	100 litros
	Decalitro	dal	10 litros
	Litro	L	1 litro
Submúltiplos	Decilitro	dl	0.1 litro
	Centilitro	cl	0.01 litro
	Mililitro	ml	0.001 litro

ANEXO FÓRMULAS ÁREA Y PERÍMETRO

Dibujo	Nombre	Fórmulas	
		Perímetro	Área
	Triángulo	$P = L + L + L$	$A = \frac{b \times h}{2}$
	Cuadrado	$P = 4L$	$A = L \times L$ $A = L^2$
	Rectángulo	$P = 2a + 2b$	$A = b \times a$
 $\pi = 3{,}1416$	Círculo	$P = D \times \pi$	$A = \pi \times r^2$
	Rombo	$P = 4a$	$A = \frac{D \times d}{2}$
	Pentágono	$P = 5L$	$A = \frac{P \times a}{2}$
	Hexágono	$P = 6L$	$A = \frac{P \times a}{2}$
	Trapecio	$P = L + L + L + L$	$A = \frac{(B \times b)\, h}{2}$
	Paralelogramo	$P = 2a + 2b$	$A = b \times h$

ANEXO FÓRMULAS ÁREA (LATERAL-TOTAL) Y VOLUMEN

NOMBRE	IMAGEN	ÁREA	VOLUMEN
Cubo o Hexaedro		$A=6a^2$	$V=a^3$
Paralelepípedo o Ortoedro		$A=2(ab+ac+bc)$	$V=abc$
Pirámide		$A=A_{base}+A_{lateral}$	$V=\frac{1}{3}\,b\cdot h$
Cilindro		$A=2\pi r\,(h+r)$	$V=\pi\, r^2\cdot h$
Cono		$A_{total}=\pi r^2+\pi\, r\, g$	$V=\frac{\pi\, r^2\cdot h}{3}$
Esfera		$A=4\,\pi\, r^2$	$V=\frac{4}{3}\pi\, r^3$

Bibliografía:

- Abálsamo, R., et al. (2012). *Matemáticas 1: Activados*. Puerto de Palos.
- Amster, P., et al. (2008). *Logonautas matemática 1*. Puerto de Palos.
- Andrés, M., Piñeiro, G., Serpa, B., Serrano, G., & Pérez, M. (2007). *Matemática I*. Santillana.
- Broitman, C., Itzcovich, H., & Novembre, A. (2020). *Los matemáticos de 5°*. Santillana.
- Effenberg, P. (2014). *Matemática I: 7° primaria*. Kapelusz.
- Kaczor, P., et al. (2017). *Entre números I: Matemática*. Santillana.
- Kurzrok, L., Altman, S., Arnejo, M., & Comparatore, C. (2009). *Matemática Es.1*. Tinta Fresca.
- Marina, A., et al. (2007). *Matemática I (II) nuevamente*. Santillana.
- Sessa, C., Borsani, V., & Lamela, C. (2015). *Hacer matemática ½*. Estrada.
- Soria, G. (2010). *100 problemas matemáticos*. Grafibel.
- Vicens Vives. (1999). *Matemática 7: Tercer ciclo*. Vicens Vives.
- *Matemática. 1 ed.* Santillana. (2008).
- *Matemática. 2 ed*. Santillana. (2008).
- *Activados. 2 ed*. Puerto de Palos. (2018).

Recursos en línea

- Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. (s.f.). *Curriculum de matemática*. https://www.buenosaires.gob.ar/educacion/docentes/curriculum/matematica
- Ministerio de Educación de la Provincia de Buenos Aires. (s.f.). *Continuemos estudiando: Matemática – Secundaria 1° año*. https://continuemosestudiando.abc.gob.ar/contenido/recursos?anos=1-ro&niveles=secundaria&areas-materias=matematica
- Santillana. (s.f.). *Matemática 7° grado*. https://www.matematicasantillana.com/7-%C2%BA-grado/
- Subsecretaría de Políticas Educativas y Carrera Docente. (s.f.). *Estudiar y aprender en casa: Matemática*. https://biblioteca-digital.bue.edu.ar/catalogo/estudiar-y-aprender-en-casa/9040/detalle/8711